Exercices et problèmes

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 1. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de sommet $I(2, 0)$ et de directrice $D : x = 1$.
2. Construire $\mathcal{P}$.

2 1. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F(2, 2)$ et de directrice $D : x = 3$.
2. Construire $\mathcal{P}$.

3 1. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$.
On note F son foyer et D sa directrice.
Déterminer les coordonnées de F et une équation de D.
2. Soit $\mathcal{P}'$ la parabole d'équation $y^2 = -4x + 8$.
a. Montrer que la parabole $\mathcal{P}'$ a pour foyer F.
b. Déterminer une équation de la directrice D' de $\mathcal{P}'$.
c. Montrer que F est compris entre D et D'.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
4. Soit $\mathcal{P}''$ la parabole d'équation $y^2 = 8x + 8$.
a. Montrer que $\mathcal{P}''$ a pour foyer F.
b. Déterminer une équation de sa directrice D''.
c. Montrer que F n'est pas compris entre D et D''.
d. Existe-t-il des points communs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$.

4 Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice, puis la tracer.
a. $y^2 = 10x$.
b. $x^2 = 12y$.
c. $y^2 = -10x$
d. $x^2 = -12y$.

5 Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice D et de sommet S. Trouver dans chacun des cas suivants l'équation réduite de $\mathcal{P}$.
1. F a pour coordonnées $(-2, 0)$ et S a pour coordonnées $(0, 0)$.
2. S a pour coordonnées $(0, 0)$ et D a pour équation $y + 3 = 0$.

6 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 6x$.
On considère une droite variable D passant par le foyer F de $\mathcal{P}$ et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est un réel non nul.
La droite D coupe la parabole $\mathcal{P}$ en M et M'.
On note K le milieu de $[MM']$.
1. Ecrire, à l'aide de m, les coordonnées de K.
2. Quel est l'ensemble des points K lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$?
3. On désigne par Δ et Δ' les tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ issues des points M et M'.
Montrer que Δ et Δ' se coupent sur la directrice de $\mathcal{P}$ et qu'elles sont perpendiculaires.

7 Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune de ses directrices, son excentricité, puis la tracer.
a. $-9x^2 + 25y^2 = 225$.
b. $9x^2 - 25y^2 = 225$.
c. $x^2 - 4y^2 = 16$.

8 Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F et F', de directrice D associée à F, de sommets S et S' et d'excentricité e. Trouver l'équation réduite de $\mathcal{H}$.
1. F a pour coordonnées $(12, 0)$ et S a pour coordonnées $(4, 0)$.
2. F et F' ont pour coordonnées $(0, 5)$ et $(0, -5)$ et $e = \sqrt{3}$.
3. F a pour coordonnées $(0, 2)$, D a pour équation $y + 3 = 0$ et $e = \sqrt{3}$.

9 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$.
Déterminer les asymptotes de $\mathcal{H}$ et construire $\mathcal{H}$.

10 Calculer l'excentricité d'une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.